Tutorato di Statistica 1 del 18/10/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
Si supponga che la lunghezza di vita in ore di una lampadina prodotta da una compagnia A sia indicata da una v.a. X distribuita come $N(800, 14.400)$. Sia Y la vita in ore di una lampadina prodotta dalla compagnia B una v.a. distribuita come una $N(850, 2500)$. Una lampadina viene selezionata a caso da ogni compagnia e lasciata accesa fino al momento di fulminazione.

1. Trovare la probabilità che il temppo di vita della lampadina selezionata dalla compagnia A superi la vita della lampadina della compagnia B di 15 ore. $P[X > Y+15] = P[X-Y > 15] =$ Si osserva che $X' = X-Y \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ Sia $X' = X - Y$, $\mu_x - \mu_y = \mu_{x'}$ e $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \sigma_{x'}^2$ allora: $= P[\frac{X'-\mu_{X'}}{\sigma_{X'}} > \frac{15-\mu_{X'}}{\sigma_{X'}}] = 1 - \Phi(65/130) = 1 - \Phi(0.5) = 0.3085$
2. Trovare la probabilità che almeno una lampadina viva almeno 920 ore. $P[max\{X, Y\} > 920] = 1 - P[max\{X, Y\} < 920] = 1 - P[X < 920, Y < 920] = 1-P[X < 920]P[Y < 920] = 1-P[Z < 120/120]P[Z < 70/50] = 1 - \Phi(1)\Phi(1.4) = 0.2266$

Esercizio 2.
Usate la disuguaglianza di Tchebycheff per trovare quante volte si deve lanciare una moneta perchè la probabilità che $\bar{X}$ sia compreso fra $0,4$ e $0,6$ sia almeno del 90%.
Nella situazione precedente come si potrebbe determinare con maggior precisione il numero dei lanci necessari in modo da rendere la probabilità molto vicina al 90%? Qual è il numero di lanci da effettuare?

$X_i \sim Bernouilli(1/2)$ quindi $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, 1/2)$
$P(0,4 < \bar{X} < 0,6) = 0,90$ $P(|\bar{X} - \mu| \geq \sigma\lambda) \leq 1/\lambda^2$ da imponendo $1/\lambda^2 = 0,90$ si ottiene che $\lambda = 1,05$ $P(-1,05\sigma < \bar{X} - \mu < 1,05\sigma) = P(-1,05\frac{\sqrt{n}}{2} < \bar{X} - \mu < 1,05\frac{\sqrt{n}}{2}) = P(-1,05\frac{\sqrt{n}}{2} + \mu < \bar{X} < 1,05\frac{\sqrt{n}}{2} + \mu)$ e quindi
$1,05\frac{\sqrt{n}}{2} + n/2 = 0,6$ da cui ricavo $n = 2$

Applicando il TLC si ottiene: $P(0,4 < \bar{X} < 0,6) = P(\frac{0,4-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0,6-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(\frac{0,4-n/2}{\sqrt{(n/4)/n}} < Z < \frac{0,6-n/2}{\sqrt{(n/4)/n}}) = \Phi(\frac{0,6-n/2}{\sqrt{(n/4)/n}}) - \Phi(\frac{0,4-n/2}{\sqrt{(n/4)/n}}) = 0,90$
Dalle tavole ricavo che $n = 1$

Esercizio 3.

1. $X \sim N(3, 16)$
$P(4 \leq X \leq 8) = P(\frac{4-3}{4} \leq Z \leq \frac{8-3}{4}) = \Phi(5/4) - \Phi(1/4) = 0,2957$

2. $X \sim N(25, 36)$
$P(|X - 25| \leq c) = P(-c \leq X - 25 \leq c) = P(-c/6 \leq Z \leq c/6) = 2\Phi(c/6) - 1 = 0,9544$ si ottiene che $c = 12$

Esercizio 4.
Se una popolazione ha $\sigma = 2$ e se $\bar{X}$ è la media dei campioni di ampiezza 100, trovate i limiti entro i quali sarà compreso $\bar{X} - \mu$ con probabilità 90%. Usate sia la disuguaglianza di Tchebycheff che il teorema del limite centrale. Perchè i due risultati sono diversi?

Usando il teorema del limite centrale:
$P[-k < \bar{X} - \mu < k] =$ e per il TLC si ha che $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma^2/\sqrt{n}}$, così è possibile approsimare la probabilità cercata e vale:
$= P[\frac{-k}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}] = P[-5k < Z < 5k] = 2\Phi(5k) - 1 = 0.9$
Allora $k = 0.33$.
Usando la disuguaglianza di Thebycheff:
$P[|\bar{X} - \mu| < k] \geq 1 - \frac{E[(\bar{X}-\mu)^2]}{k^2}$
Allora $k < 0,63$

Esercizio 5.
Sia $X_1, ..., X_n$ un c.c. con $\sigma^2 = 1$. Determinare il minimo valore di n t.c. $P(|\bar{X} - \mu| < 0,5) > 95\%$.
Applichiamo la legge debole dei grandi numeri:
$\epsilon^2 = 0,5$, $1 - \delta = 0,95$ da cui $\delta = 0,05$ quindi
$n > \frac{1}{(0,5)^2 * 0,05}$ da cui $n > 80$